



ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.



Казанский федеральный
УНИВЕРСИТЕТ

Газизова Светлана Евгеньевна

Ассистент, Институт экологии и природопользования

kpfu.ru/gazizova.svetlana

SvEGazizova@kpfu.ru



Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Пусть дана функция $z = F(x, y)$, имеющая частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Частные производные от этих производных называются частными производными второго порядка. Они обозначаются:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего порядка и других высших порядков.



Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Полные дифференциалы высших порядков определяются так:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$



Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Рассмотрим следующие примеры. Найти частные производные третьего порядка функций:

$$\text{a) } z = x^3 + x^2y + y^3$$

$$\text{b) } u = \frac{y}{x}$$



Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

$$a) z = x^3 + x^2y + y^3$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 6$$



Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

$$b) u = \frac{y}{x}$$

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\frac{6y}{x^4}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$$



Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Найти полный дифференциал второго порядка для функции u , если

$$1) u = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2) u = x \ln \frac{y}{x}$$

Решение:

$$1) \frac{\partial u}{\partial x} = -2 \frac{y^2}{x^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -4 \frac{y}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6 \frac{y^2}{x^4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{x^2}$$

Таким образом

$$d^2u = 6 \frac{y^2}{x^4} dx^2 - 8 \frac{y}{x^3} dx dy + \frac{2}{x^2} dy^2$$



Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Решение:

$$2) \frac{\partial u}{\partial x} = \ln \frac{y}{x} - 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}$$

В итоге получаем ответ

$$d^2 u = 6 \frac{y^2}{x^4} dx^2 - 8 \frac{y}{x^3} dx dy + \frac{2}{x^2} dy^2$$



Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Доказать, что если $z = \cos(mx + ny)$, то $d^2z = -z(m dx + n dy)^2$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -m \sin(mx + ny)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -n \sin(mx + ny)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -m^2 \cos(mx + ny)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -n^2 \cos(mx + ny)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -mn \cos(mx + ny)$$



Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Далее подставим производные в выражение:

$$\begin{aligned}d^2z &= -m^2 \cos(mx + ny) dx^2 - 2mn \cos(mx + ny) dx dy - \\ &\quad - n^2 \cos(mx + ny) dy^2 = \\ &= -\cos(mx + ny) (m^2 dx^2 + 2mn dx dy + n^2 dy^2) = \\ &= -z(m dx + n dy)^2\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.



Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

Задачи для самостоятельного выполнения.

Найти полные дифференциалы второго порядка функций:

$$1) z = x^2y^2 - 4xy$$

$$2) z = \frac{2}{y - 2x}$$

$$3) u = \cos(t^2 - st)$$



Спасибо за внимание!