



ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.



Казанский федеральный
УНИВЕРСИТЕТ

Газизова Светлана Евгеньевна

Ассистент, Институт экологии и природопользования

kpfu.ru/gazizova.svetlana

SvEGazizova@kpfu.ru



Полный дифференциал первого порядка.

Если функция $z = F(x, y)$ имеет в точке (x, y) непрерывные частные производные, то ее полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon * \rho,$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \rightarrow 0$. Тогда выражение $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ есть главная часть полного приращения Δz . Она называется полным дифференциалом функции и обозначается dz :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Полагая в этой формуле z равным: 1) x , 2) y , найдем: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$



Полный дифференциал первого порядка.

Рассмотрим следующие примеры. Найти полные дифференциалы функций:

$$\text{a) } z = x^2 y$$

$$\text{b) } z = \frac{xy}{x - y}$$

$$\text{c) } u = e^{s/t}$$

$$\text{d) } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Полный дифференциал первого порядка.

$$a) z = x^2 y$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

Тогда полный дифференциал записывается как:

$$dz = 2xy \, dx + x^2 \, dy$$



Полный дифференциал первого порядка.

$$b) z = \frac{xy}{x - y}$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x - y) - xy}{(x - y)^2} = -\frac{y^2}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x - y) + xy}{(x - y)^2} = \frac{x^2}{(x - y)^2}$$

Следовательно

$$dz = -\frac{y^2}{(x - y)^2} dx + \frac{x^2}{(x - y)^2} dy$$

$$c) u = e^{s/t}$$

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = e^{s/t} * \frac{1}{t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{s/t} * \left(\frac{-s}{t^2} \right)$$

Следовательно

$$du = e^{s/t} * \frac{1}{t} ds - e^{s/t} * \left(\frac{s}{t^2} \right) dt$$



$$d) z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} * 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Следовательно

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$



Полный дифференциал первого порядка.

Задачи для самостоятельного выполнения.

Найти полные дифференциалы функций:

1) $z = \cos(ax)$

2) $z = \frac{2x}{y^2 - 2x}$

3) $u = \cos(t^2 - s)$

4) $z = \ln(2x + y)$



Спасибо за внимание!