



ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА



Казанский федеральный
УНИВЕРСИТЕТ

Газизова Светлана Евгеньевна

Ассистент, Институт экологии и природопользования

kpfu.ru/gazizova.svetlana

SvEGazizova@kpfu.ru



Частные производные первого порядка.

Производная функции $z = F(x, y)$ по x , найденная в предположении, что y остается постоянным, называется *частной производной* z по x и обозначается

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F'_x(x, y).$$

Аналогично определяется и обозначается *частная производная* z по y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F'_y(x, y).$$



Частные производные первого порядка.

1. Рассмотрим следующие примеры. Найти частные производные первого порядка функций:

a) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$

b) $z = \ln(x^2 + y^2)$

Подсказка: для решения необходимо вспомнить таблицу основных формул дифференцирования.



Частные производные первого порядка.

Для решения данного примера необходимо вспомнить формулу
 $(x^n)' = nx^{n-1}$:

$$\text{а) } z = x^3 + 3x^2y - y^3$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$



Частные производные первого порядка.

Для решения данного примера необходимо также вспомнить формулу $(\ln x)' = x^{-1}$:

$$\text{b) } z = \ln(x^2 + y^2)$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} * (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$



2. Найти производные от частного функций:

$$z = \frac{xy}{x - y}$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x - y) - xy}{(x - y)^2} = \frac{-y^2}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x - y) + xy}{(x - y)^2} = \frac{x^2}{(x - y)^2}$$

3. Найти частные производные функции:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$$

Решение:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{2a - 2b \cos \alpha}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} = \frac{a - b \cos \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}$$

$$\frac{\partial c}{\partial b} = \frac{2b - 2a \cos \alpha}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} = \frac{b - a \cos \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \alpha} = \frac{2a \sin \alpha}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}$$



Частные производные первого порядка.

4. Доказать, что если $u = e^{x/t^2}$, то выполняется равенство

$$2x \frac{\partial u}{\partial x} + t \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Докажем по порядку, сначала отыскав частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x/t^2} * \frac{1}{t^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = e^{x/t^2} * \left(-\frac{2x}{t^3} \right),$$

и после подставив их в уравнение

$$2x * e^{\frac{x}{t^2}} * \frac{1}{t^2} + t * e^{\frac{x}{t^2}} * \left(-\frac{2x}{t^3} \right) = 0$$

$$\frac{2x}{t^2} * e^{\frac{x}{t^2}} - \frac{2x}{t^2} * e^{\frac{x}{t^2}} = 0$$

$$0 = 0$$

Что и требовалось доказать.



Частные производные первого порядка.

5. Доказать, что если $u = x^y$, то выполняется равенство

$$\frac{x}{y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial u}{\partial y} = 2u.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Подставим в уравнение:

$$\frac{x}{y} yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x} x^y \ln x = 2u.$$

$$x^y + x^y = 2u$$

$$2u = 2u$$

Что и требовалось доказать.



Частные производные первого порядка.

Задачи для самостоятельного выполнения.

Найти частные производные функций:

$$1) z = \cos(ax - by)$$

$$2) z = \frac{x}{3y - 2x}$$

$$3) u = \ln \sin(x - 2t)$$

$$4) z = e^{x/y} \ln y$$



Спасибо за внимание!